# RENDIMIENTO de TRANSFORMADORES

*Norberto A. Lemozy*

## 1 INTRODUCCIÓN

El conocimiento del rendimiento de cualquier máquina, dispositivo o sistema tiene una gran importancia por el valor económico que ello reporta, tanto desde el punto de vista del costo de operación como del ambiental. En general el rendimiento de una máquina, normalmente indicado con la letra griega eta $\eta$, está dado por el cociente de las potencias de salida y de entrada:

$$\boxed{\eta = \frac{\text{Potencia de salida}}{\text{Potencia de entrada}}}$$

En el caso particular de los transformadores se está en presencia de una máquina de características excepcionales: su rendimiento es muy elevado y requieren muy bajo mantenimiento; todo ello debido a su condición de máquina estática.

En las máquinas eléctricas, como en otros casos también, ocurre que las de mayor potencia son las más eficientes. Esto se puede demostrar analizando cómo varían las pérdidas y cómo lo hace la potencia de la máquina. En efecto tanto las pérdidas en el hierro $P_{Fe}$ como las del cobre $P_{Cu}$ dependen, a igualdad de condiciones de diseño y materiales, de los respectivos volúmenes de hierro $V_{Fe}$ y cobre $V_{Cu}$, es decir del cubo de las dimensiones lineales:

$$P_{Fe} = (P_h + P_p) \cdot V_{Fe} = \left( k_h\ f\ B_{máx}^n + \frac{\pi^2 a^2}{6 \rho_{Fe}} f^2\ B_{máx}^2 \right) \cdot V_{Fe} \ \ [\text{W}] \tag{1}$$

$$P_{Cu} = \rho_{Cu}\ J^2 V_{Cu} \ \ [\text{W}] \tag{2}$$

Donde:

- $P_h$ Pérdidas por histéresis [W/m$^3$].
- $P_p$ Pérdidas por corrientes parásitas [W/m$^3$].
- $k_h$ Constante del material magnético.
- $f$ Frecuencia [Hz].
- $B_{máx}$ Valor máximo de la inducción magnética [T].
- $n$ Exponente de Steinmetz.
- $a$ Espesor de las chapas del núcleo [m].
- $\rho_{Fe}$ Resistividad de las chapas del núcleo [Ωm].
- $\rho_{Cu}$ Resistividad del cobre [Ωm].
- $J$ Densidad de corriente [A/m$^2$].

Por otro lado la potencia aparente de la máquina vale:

$$S = \sqrt{3}\, U\ I \ \ [\text{VA}] \tag{3}$$

Como en la mayoría de los casos la diferencia entre la tensión $U$ y la fuerza electromotriz inducida $E$ es muy pequeña, se puede poner:

$$S \cong \sqrt{3}\, E\, I = \sqrt{3}\,\frac{2\pi}{\sqrt{2}}\, f\, N\, S_{Fe} B_{máx} \cdot J\, S_{Cu} \ \text{[VA]} \tag{4}$$

Aquí también a igualdad de condiciones de diseño y de materiales, la fuerza electromotriz inducida depende de la sección del núcleo y la corriente de la sección del conductor; por lo tanto la potencia aparente es función de las dimensiones lineales a la cuarta potencia.

Entonces a medida que aumentan las dimensiones de la máquina, crece más rápidamente su potencia que sus pérdidas y por lo tanto mejora su rendimiento. Lamentablemente no todo es tan sencillo y en las máquinas de gran potencia aparecen otros factores que complican su funcionamiento, por ejemplo la forma de evacuar el calor que producen las pérdidas para mantener la temperatura de operación dentro de los límites admitidos por los materiales aislantes.

## 2 DETERMINACIÓN DEL RENDIMIENTO

### 2.1 Medición directa

Una forma de obtener el rendimiento de una máquina es medir las potencias absorbida $P_1$ , la de salida $P_2$ y realizar su cociente:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} \tag{5}$$

En la figura 1 se muestra esquemáticamente un posible circuito para hacer esas mediciones:

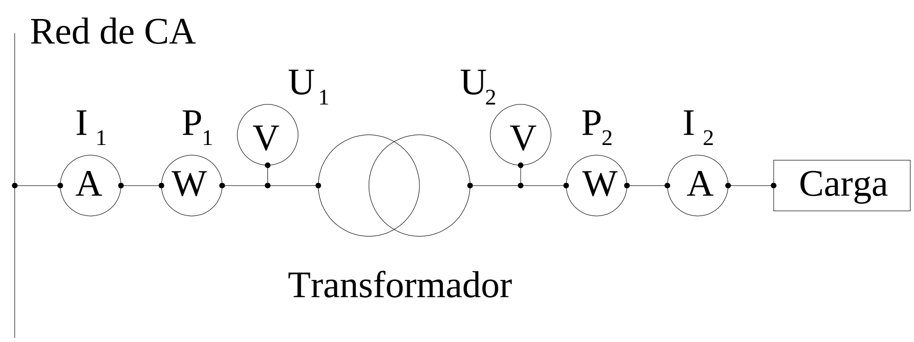


Fig. 1. Determinación directa.

Si bien en un transformador ambas potencias son eléctricas y por lo tanto fáciles de medir, se presentan otros problemas. Los transformadores son máquinas que se construyen para potencias muy grandes y puede resultar imposible disponer tales potencias en los laboratorios, lo mismo que las cargas donde disiparlas. Este problema se presenta aún en los transformadores de distribución, que si bien son de potencias menores, son los más utilizados.

Un problema adicional aparece en el cálculo de la potencia de pérdidas $P_{per}$ que resulta de la diferencia de dos magnitudes próximas entre sí y al hacer la propagación de errores, el resultado puede quedar con un error relativo inadmisible. Un ejemplo numérico puede aclarar la situación: supóngase que las potencias valen $P_1$ = 1000 kW y $P_2$ = 950 kW lo que daría un rendimiento del 95% y una potencia de pérdidas de 50 kW. Si cada una de las potencias se mide con un error relativo de aproximadamente 1%, es decir 10 kW, la potencia $P_1$ indicada por el wattímetro de la entrada estaría comprendida entre los valores:

$$990 \leq P_1 \leq 1010 \ \text{kW}$$

Y la potencia $P_2$ entre:

$$940 \le P_2 \le 960 \text{ kW}$$

Si la mala suerte hace que uno de los wattímetro indique por defecto y el otro por exceso, la potencia de pérdidas resultaría entre los valores:

$$990 - 960 = 30 \le P_{per} \le 70 = 1010 - 940 \text{ kW}$$

Entonces, respecto del valor exacto de 50 kW resultaría:

$$P_{per} = 50 \pm 20 = 50 \pm 40\% \text{ kW}$$

Error excesivamente alto y que invalida la medición. Lo anterior es absolutamente cierto y puede ocurrir toda vez que se hace una determinación como diferencia de dos magnitudes con valores próximos entre sí.

Otro inconveniente de la determinación anterior es que no se sabe qué valor le corresponde a cada una de las pérdidas por separado.

**2.2 Determinación a partir del circuito equivalente**

Como en el caso del transformador el circuito equivalente es un modelo que se aproxima mucho a la realidad y sus parámetros se pueden determinar con facilidad y exactitud, aún en unidades de gran potencia, es preferible determinar el rendimiento a partir del mismo, que es la forma indicada en las normas y por lo tanto se denomina “convencional”.

El rendimiento se puede expresar como:

$$\boxed{\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_2}{P_2 + P_{per}} = \frac{P_2}{P_2 + P_{Cu} + P_{Fe}}} \tag{6}$$

En un transformador monofásico esas potencias valen:

$$P_2 = U_2 I_2 \cos\varphi_2 \tag{7}$$

$$P_{Cu} = r_e I_2^2 \tag{8}$$

$$P_{Fe} = \frac{U_2^2}{R_p} \tag{9}$$

Donde $U_2$ generalmente es el valor nominal $U_{2n}$ que es constante; la corriente $I_2$ y el factor de potencia $\cos\varphi_2$ definen *la carga* para la cual se quiere calcular el rendimiento, es decir *se eligen*. Como se está trabajando con magnitudes del secundario, los parámetros $r_e$ y $R_p$ *deben* estar referidos a ese arrollamiento.

Reemplazando resulta:

$$\boxed{\eta = \frac{U_2 I_2 \cos\varphi_2}{U_2 I_2 \cos\varphi_2 + r_e I_2^2 + \dfrac{U_2^2}{R_p}}} \tag{10}$$

Si se representa el rendimiento, en función de la corriente de carga $I_2$ para distintos valores de factor de potencia, resultan curvas como las de la figura 2, a las que les corresponde $\cos\varphi_2$ igual a 1 y 0,7. Éstas, como todas las curvas de rendimiento, salen de cero, pasan por un máximo y luego tienden asintóticamente a cero.

Como es común en la práctica corriente de máquinas eléctricas, se puede calcular el rendimiento utilizando valores en tanto por uno (pu). La expresión (10) también es válida si se ponen todas sus magnitudes y parámetros en tanto por uno; si además la tensión de salida se toma como la nominal:

$$U_2 = U_{2n} = 1\left[\%_1\right] \tag{11}$$

y además se recuerda que en condiciones nominales resulta:

$$r_e\left[\%_1\right] = P_{cc}\left[\%_1\right] \tag{12}$$

$$\frac{1}{R_p\left[\%_1\right]} = G_p\left[\%_1\right] = P_0\left[\%_1\right] \tag{13}$$

Como la tensión secundaria del transformador varía muy poco con la carga, la potencia aparente de salida, que a veces se la indica como *carga k*, en por unidad, resulta prácticamente igual a la corriente de salida, también en por unidad:

$$k\left[\%_1\right] = S_2\left[\%_1\right] = \frac{U_2 I_2}{U_{2n} I_{2n}} \cong \frac{I_2}{I_{2n}} = I_2\left[\%_1\right] \tag{14}$$

Reemplazando en la expresión (10) queda:

$$\boxed{\eta = \frac{I_2 \cos\varphi_2}{I_2 \cos\varphi_2 + P_{cc} I_2^2 + P_0}} \; \textit{(Todo en pu)} \tag{15}$$

Forma muy cómoda ya que utiliza las potencias medidas en los ensayos en cortocircuito y en vacío en pu.

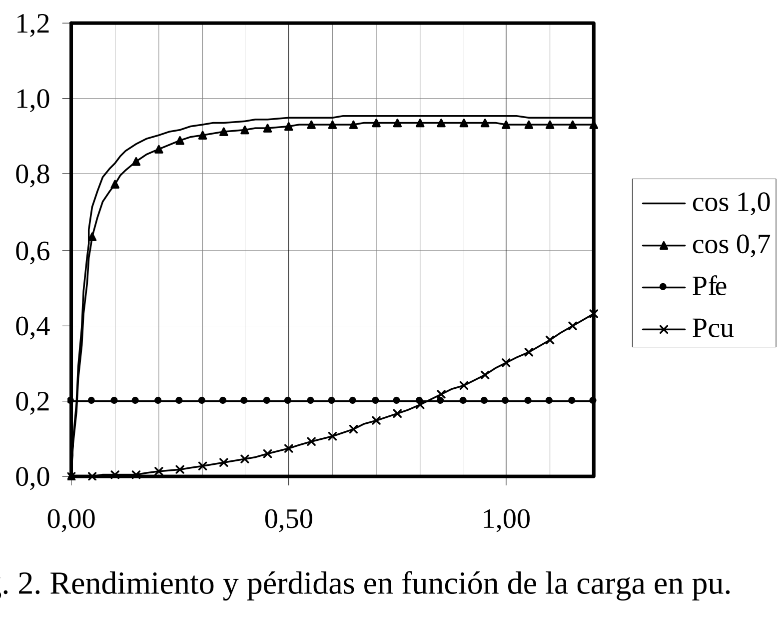


Fig. 2. Rendimiento y pérdidas en función de la carga en pu.

En la expresión (10) se supone que tanto las pérdidas en el cobre como las del hierro varían cuadráticamente con la corriente y con la tensión de salida respectivamente, otro tanto ocurre en la expresión (15) donde además a la tensión se la consideró constante e igual a la nominal. Esto equivale a utilizar circuitos equivalentes *aproximados* para la determinación de las pérdidas. Los valores de rendimiento así obtenidos difieren *muy poco* de los reales del transformador y, para la mayoría de las aplicaciones, no se justifica perfeccionar su determinación.

Si además, la potencia de cortocircuito se expresa a la temperatura normalizada, por ejemplo 75°C para los transformadores en aceite, al rendimiento calculado de esa forma se lo denomina "convencional" es decir de acuerdo a una norma establecida de común acuerdo entre las partes interesadas.

**2.3 Rendimiento máximo**

La ubicación del máximo de rendimiento es importante ya que conviene que el transformador trabaje la mayor parte del tiempo cerca de ese punto. Para hallar ese máximo hay que hacer la derivada de la expresión (10) o de la (15) e igualarla a cero. Para simplificar el proceso conviene dividir esas expresiones por la corriente $I_2$, y luego hallar el mínimo de su denominador, haciendo su derivada e igualándola a cero. Partiendo de la expresión (10) resulta:

$$\eta = \frac{U_2 \cos\varphi_2}{U_2 \cos\varphi_2 + r_e I_2 + \dfrac{U_2^2}{R_p I_2}} \tag{16}$$

$$\frac{d}{dI_2}(\text{denominador}) = r_e - \frac{U_2^2}{R_p I_2^2} = 0 \tag{17}$$

De donde:

$$r_e I_2^2 = \frac{U_2^2}{R_p} \tag{18}$$

Es decir que el máximo del rendimiento se produce cuando las *pérdidas en el cobre* (cuadráticas) *son iguales a las del hierro* (constantes). La corriente de carga que produce esta condición se obtiene despejándola de la ecuación (17):

$$\boxed{I_{2\eta} = \frac{U_2}{\sqrt{r_e \cdot R_p}}} \tag{19}$$

Reemplazando este valor en la expresión (10) o (16) se obtiene el valor del rendimiento máximo:

$$\boxed{\eta_{máx} = \frac{I_{2\eta} \cos\varphi_2}{I_{2\eta} \cos\varphi_2 + 2\dfrac{U_2}{R_p}} = \frac{\cos\varphi_2}{\cos\varphi_2 + 2\sqrt{\dfrac{r_e}{R_p}}}} \tag{20}$$

En el ejemplo mostrado en la figura 2 el máximo de rendimiento ocurre al 81,65 % de la carga nominal del transformador. Dado que en diseño del transformador se pueden variar los valores de las pérdidas, el fabricante puede hacer que el rendimiento máximo del transformador se produzca en el valor de carga más conveniente. Procediendo a partir de la expresión (15) se llega a:

$$\boxed{I_{2\eta} = \sqrt{\frac{P_0}{P_{cc}}} \left[0\!\!/_1\right]} \tag{21}$$

$$\boxed{\eta_{máx} = \frac{I_{2\eta}\cos\varphi_2}{I_{2\eta}\cos\varphi_2 + 2P_0} = \frac{\cos\varphi_2}{\cos\varphi_2 + 2\sqrt{P_0 P_{cc}}}} \text{ (Todo en pu)} \tag{22}$$

La conclusión obtenida más arriba, que el rendimiento máximo ocurre cuando las pérdidas cuadráticas son iguales a las pérdidas constantes, es válida aún cuando se tengan pérdidas de variación lineal. Si bien estas pérdidas no existen en los transformadores, pueden estar presentes en las máquinas rotativas, y resulta oportuno analizarlo. Supóngase el rendimiento de una máquina cuya potencia de pérdidas tiene un término lineal:

$$\eta = \frac{UI\cos\varphi}{UI\cos\varphi + AI^2 + BI + C} = \frac{U\cos\varphi}{U\cos\varphi + AI + B + \frac{C}{I}} \tag{23}$$

Al hacer la derivada del denominador, para hallar el máximo del rendimiento, el término lineal desaparece y el máximo ocurre cuando las pérdidas cuadráticas son iguales a las constantes:

$$AI^2 = C \tag{24}$$

## 3 RENDIMIENTO CÍCLICO

La importancia del conocimiento del rendimiento de una máquina radica en que a partir del mismo se puede obtener la potencia de pérdidas $P_{per}$ y con ésta calcular el costo de operación de esa máquina.

$$P_{per} = P_1 - P_2 = P_1(1-\eta) = P_2\left(\frac{1}{\eta} - 1\right) \tag{25}$$

Como lo que se paga es la energía perdida $W_{per}$ para obtenerla se deberá integrar la potencia de pérdidas en el intervalo deseado:

$$W_{per} = W_{Cu} + W_{Fe} = \int_{t_1}^{t_2} P_{per} \cdot dt \tag{26}$$

A fin de obtener directamente esta energía de pérdidas, se define un rendimiento, semejante al de la ecuación (6), pero en base a energías:

$$\boxed{\eta = \frac{W_2}{W_1} = \frac{W_2}{W_2 + W_{per}} = \frac{W_2}{W_2 + W_{Cu} + W_{Fe}}} \tag{27}$$

Para calcular las respectivas energías se debe establecer un determinado intervalo de tiempo y, por razones prácticas, conviene tomar un lapso en el que las condiciones de carga del transformador se vuelvan a repetir, por ejemplo 24 horas, una semana, un mes, etc. Como para que los resultados sen veraces, las condiciones de carga se deben repetir cíclicamente, al rendimiento calculado de esta forma se lo denomina *rendimiento cíclico*.

La curva que relaciona la potencia consumida por la carga en función del tiempo se denomina *curva de carga* y puede tener distintas formas dependientes del tipo de consumo, por ejemplo puede ser una carga constante, por ejemplo un proceso que rara vez se interrumpe; en este caso el rendimiento cíclico y el convencional resultan iguales.

La curva de carga de un edificio de oficinas, donde se utiliza mayormente iluminación artificial, tendrá un valor casi constante durante las horas de trabajo y se reducirá a un mínimo en las horas nocturnas. Si en esas oficinas hay incidencia de la luz solar, aparecerá un pico de consumo cuando baja la luz natural y aún se continúa trabajando. Por el contrario en un sistema de alumbrado público, durante las horas diurnas, el consumo será mínimo y aumentará en el horario nocturno.

En la figura 3 se muestra la curva de carga correspondiente a un día hábil de una facultad de la UBA donde se trabaja en horarios diurnos y vespertinos y además hay equipos de laboratorio en funcionamiento permanente.

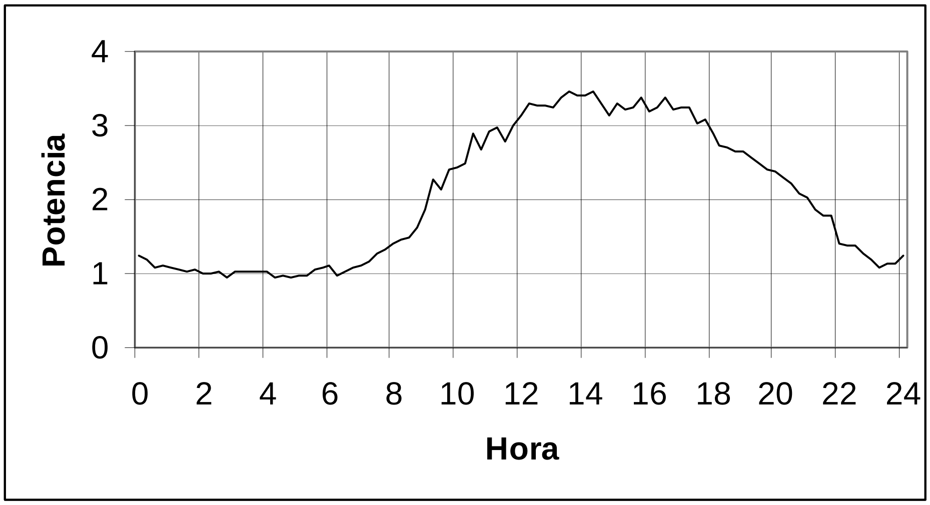


Fig. 3. Curva de carga.

Para el cálculo del rendimiento, utilizando la ecuación (27), se deben calcular las distintas energías. La energía que suministra el transformador está representada por el área encerrada por la curva de carga y el eje de abscisas la que se puede obtener por medio de algún método de integración gráfica; y si no se necesita una gran exactitud, se pueden tomar rectángulos de base $\Delta t$ y de altura $\Delta P$ y realizar una sumatoria.

$$W_2 = \int P_2 \cdot dt \cong \sum_{k=1}^{N} \Delta P_k \cdot \Delta t_k \tag{28}$$

Si se trabaja con la carga relativa, ecuación (14), la potencia de salida se puede escribir como:

$$P_2 = S_2 \cos\varphi_2 = S_n \cdot I_2\left({}^0\!/_1\right) \cdot \cos\varphi_2 \tag{29}$$

Y la energía como:

$$W_2 = S_n \sum_{k=1}^{N} \Delta I_{2k}\left({}^0\!/_1\right) \cdot \cos\varphi_{2k} \cdot \Delta t_k \tag{30}$$

Con este mismo criterio la energía de pérdidas en el cobre se puede poner como:

$$W_{Cu} = P_{cc} \sum_{k=1}^{N} \Delta I_{2k}^2\left({}^0\!/_1\right) \cdot \Delta t_k \tag{31}$$

Si la tensión es constante, las pérdidas en el hierro también lo serán y la energía de pérdidas resulta:

$$W_{Fe} = P_0 \sum_{k=1}^{N} \Delta t_k = P_0 \cdot t_c \tag{32}$$

Donde $t_c$ es el *tiempo de conexión*, es decir el tiempo durante el cual el transformador está conectado a la red y se producen pérdidas en el hierro. Si las energías son grandes, es muy probable que resulte más cómodo expresar las potencias en kVA o kW y los tiempos en horas.

Reemplazando estas tres energías en la expresión (27) se puede calcular el rendimiento cíclico que le corresponde al transformador en ese intervalo de tiempo.

## 4 BIBLIOGRAFÍA

EE Staff del MIT: *"Circuitos Magnéticos y Transformadores"* Editorial Reverté, 1943.

Corrales Martín J.: *"Teoría, Cálculo y construcción de Transformadores"* Editorial Labor, 1945.

Lawrence R. R. y Richards H. E.: *"Principles of Alternating Current Machinery"* Mc. Graw Hill Co. 1953.

Moeller F. y Werr Th.: *"Electrotecnia General y Aplicada"* Tomo II, primera parte, Editorial Labor, 1972.

Ing. Norberto A. Lemozy
2009